Задание по математике

Группа МЛ-21

01.02.2021

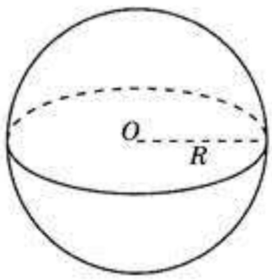
Задание:
1.Изучите конспект урока
2. Выучите формулы
3. Решите задачи

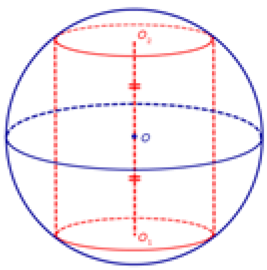
Окружность – множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Данная точка называется *центром* окружности, расстояние от центра до любой точки окружности называется *радиусом* окружности. *Круг* – это часть плоскости, ограниченная окружностью. *Сфера* – это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, которую называют *центром.*

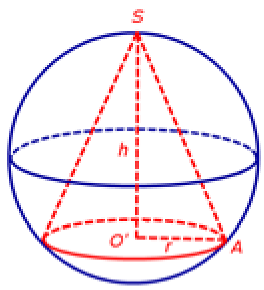
Тело, ограниченное сферой, называется *шаром.*

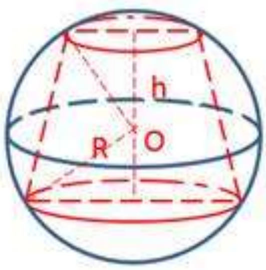
Уравнение сферы – уравнение сферы радиуса R и центром C(x_0; y_0; z_0).
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к сфере***,** а их общая точка – *точкой касания.*









Соотношение между радиусом сферы, радиусом сечения и расстоянием от центра сферы до плоскости сечения:
$R^2=h^2+r^2$
Формула для вычисления площади поверхности сферы и ее элементов:
$S=4\pi R^2$ – площадь сферы.

$S = 2\pi Rh$ – площадь поверхности сегмента сферы радиуса R с высотой h.

$S = \pi Rh(2h + \sqrt{2hR - h^2}$ – площадь поверхности сектора с высотой h.

3. *Взаимное расположение сферы и плоскости*

Взаимное расположение сферы и плоскости зависит от соотношения между радиусом сферы R и расстояния от центра сферы до плоскости d.

1. Пусть $d < R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, тогда сфера и плоскость пересекаются, и сечение сферы плоскостью есть окружность.

2. Пусть $d = R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы тогда сфера и плоскость имеют только одну общую точку, и в этом случае говорят, что плоскость касается сферы.

3. Пусть $d > R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Рассмотрим случай касания более подробно.

Задача №1. Площадь сечения шара, проходящего через его центр, равна 9 кв. м. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:

Площадь круга вычисляется по формуле: $S_{\text{кр}} = \pi R^2$

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле: $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$. Радиус шара и радиуса сечения, проходящего через центр шара, одинаковые. Поэтому площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его диаметрального сечения. То есть площадь поверхности шара равна 36.

Ответ: 36

Задача №2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5.

Решение:

Площадь сферы равна $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$. То есть $S_{\text{сф}}=100\pi$.

По условию площадь круга некоторого радиуса r также равна 100π. Значит, r^2 =100, то есть r=10.

Ответ: 10.

Задача №3. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB=13, BC=14, CA=15

Решение:

Окружность, вписанная в треугольник, является сечением сферы.

Найдем ее радиус.

Площадь треугольника с известными сторонами можно вычислить по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = 0.5(AB + BC + AC) = 21$

$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 * 8 * 7 * 6} = 84$

S=84.

С другой стороны, $S = p * r$

Отсюда r=4.

Теперь найдем расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Используем соотношение:

$R^2 = h^2 + r^2$

$h^2 = R^2 - r^2$

$h^2 = 25 - 16 = 9$

$h = 3$

Ответ: 3.

Задача №4. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10. Найти расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16.

Решение:

Так как вершины прямоугольника лежат на сфере, то окружность, описанная около прямоугольника, является сечением сферы.

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали, то есть r=8.

По условию задачи R=10.

Используем соотношение:

$R^2 = h^2 + r^2$

$h^2 = R^2 - r^2$

$h^2 = 100 - 64 = 36$ h=6.

Ответ: 6.

Задача№5

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$d_1 = \sqrt{100-36} = 8$ см

или

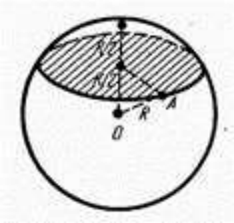
$d_2 = \sqrt{100-64} = 6$ см.

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

d=14 см

Задача№7

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга (рис. 69)?



Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно

$$\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{3}{4}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Шар, радиус которого равен 41дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

3) Радиус шара равен 63см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

4) Радиус шара *R*. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60^0 к нему. Найти площадь сечения.

5) На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13см. Радиус шара равен 13см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Контрольные вопросы:

Дайте определение шара, сферы.

Запишите формулы площади сферы, объема шара.